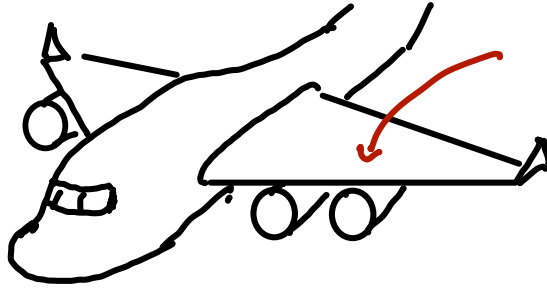
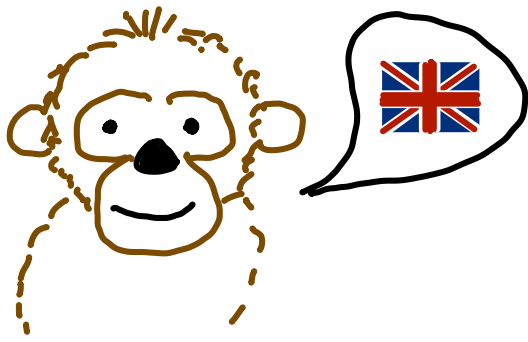


$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = 0\}$$



Exemple 9.30 (ii)

Soit $\alpha > 0$. L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemple 3.42 (iii)

Soit $\alpha > 0$. La série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

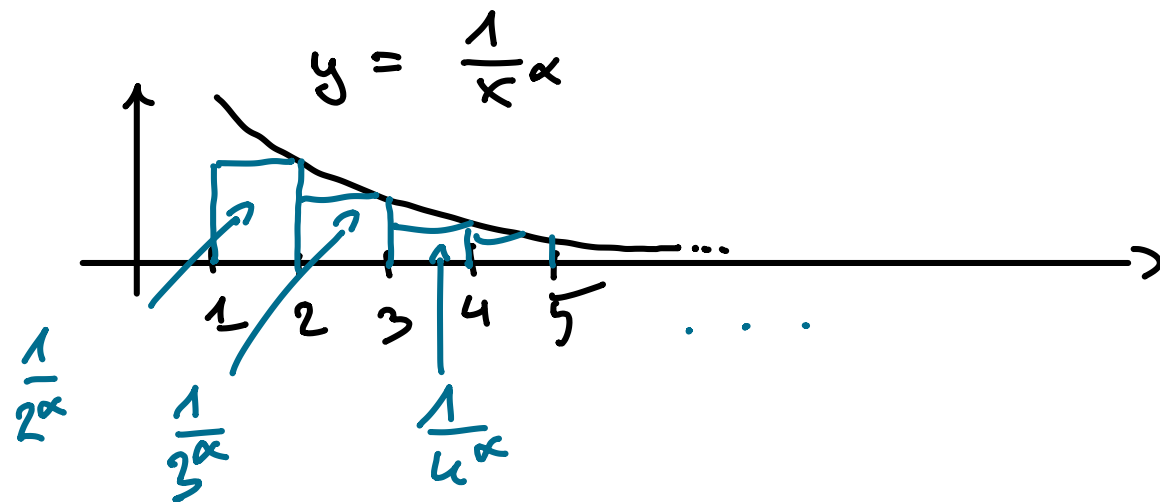
Proposition 9.31 :

Soit $\alpha > 0$. La série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Preuve :

"⇐": Supposons $\alpha > 1$. Montrons que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge.}$$



$$\text{Aire rectangles} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx < +\infty$$

Soit $n \geq 2$ quelconque. Vu que $\frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante,
on a $\forall x \in [n-1, n], \frac{1}{x^\alpha} \geq \frac{1}{n^\alpha}$
 $\Rightarrow \int_{n-1}^n \frac{1}{x^\alpha} dx \geq \int_{n-1}^n \frac{1}{n^\alpha} dx = \left[\frac{x}{n^\alpha} \right]_{x=n-1}^{x=n} = \frac{1}{n^\alpha}$

De plus,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-1}^n \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_1^2 \frac{1}{x^\alpha} dx + \int_2^3 \frac{1}{x^\alpha} dx + \int_3^4 \frac{1}{x^\alpha} dx + \dots$$

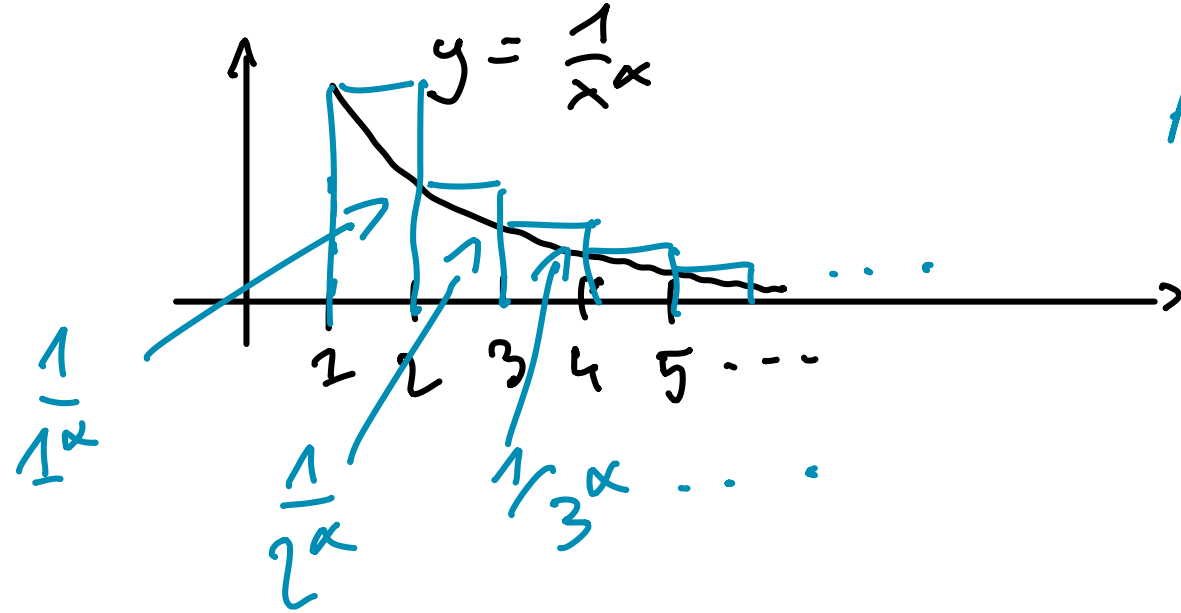
$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-1}^n \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ converge.}$$

On que $\left| \frac{1}{n^\alpha} \right| = \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{x^\alpha} dx$, par le critère de comparaison,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge.}$$

" $\Rightarrow$ " Par contraposée supposons $0 < \alpha \leq 1$ et montrons que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.



Aire des rectangles

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \geq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = +\infty$$

Soit $n \geq 1$ quelconque. Vu que $\frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante sur $[n, n+1]$, on a $\forall x \in [n, n+1],$

$$\frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

Donc,
$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n^\alpha} dx = \frac{1}{n^\alpha}$$

Or,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_1^2 \frac{1}{x^\alpha} dx + \int_2^3 \frac{1}{x^\alpha} dx + \int_3^4 \frac{1}{x^\alpha} dx + \dots$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = +\infty.$$

Ainsi, par le critère de comparaison,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ diverge.}$$



Soit $f: [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ (i.e. $f \geq 0$) continue,
décroissante. Alors,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \text{ converge} \iff \int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ converge.}$$

§ 9.5 Primitives de séries entières et DLs

Proposition 9.32 (Primitive d'un DL)

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $x_0 \in I$, $f \in C^n(I)$
dont le DL autour de x_0 s'écrit

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-x_0)^k + o(|x-x_0|^n),$$

et F une primitive de f . Alors, le DL de F
d'ordre $n+1$ autour de x_0 s'écrit

$$F(x) = C + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1} + o(|x-x_0|^{n+1})$$

$$= C + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{k} (x-x_0)^k + o(|x-x_0|^{n+1})$$

où $C = F(x_0)$

Proposition 9.33 (Primitive d'une série entière)

Soit $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k$ une série entière,

avec rayon de convergence $r > 0$

Alors, les séries entières de la forme

$$C + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1} = C + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{k-1}}{k} (x-x_0)^k$$

ont le même rayon de convergence $r > 0$ et

sont les primitives de $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k$ sur

$]x_0 - r, x_0 + r[$

$\sum_{k=0}^{+\infty}$

Exemple 9.34 (i)

Calculer la série de Taylor de $\arctan(x)$ autour de $x_0 = 0$.

$$\text{On a } (\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2} = f(x^2) \text{ où}$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k \quad \text{pour } x \in]-1, 1[$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = f(x^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (x^2)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}$$

pour $x^2 \in]-1, 1[$, i.e. $x \in]-1, 1[$.

$$\Rightarrow \arctan(x) = C + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}$$

$\int dx$

En évaluant au $x_0 = 0$, on obtient

$$\underbrace{\arctan(0)}_{=0} = c \quad \Rightarrow \quad c = 0,$$

et donc,

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

(ii) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$,

la primitive de e^{-x^2} qui s'annule en 0.

$$\text{On a } e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

$$\Rightarrow e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!}$$

$$\int^x (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!} dt = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$\Rightarrow \int_0^x e^{-t^2} dt = C + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}$$

Pour trouver C , on évalue en 0 :

$$\int_0^0 e^{-t^2} dt = C \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}$$

FIN.

Conclusion : Quel retour de ce cas d'analyse?

Pour l'examen : tout.

Pour la suite de ces études : DLs.

Pour la suite de la vie : Le langage courant
est ambigu